TD 1 : Logique et raisonnement mathématique

Quantificateurs

Exercice 1: Traduire mathématiquement les phrases suivantes :

1. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.
3. Pour chaque entier, on peut trouver un entier plus grand.
4. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il suffit qu'il soit supérieur à 3.
5. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il faut qu'il soit supérieur à 1.
6. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier soit supérieur à 3 est qu'il soit strictement supérieur à 2.

Exercice 2: Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$.
2. $(\exists x \in E,\ A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E,\ A(x))$.
3. $\exists! x \in E,\ A(x)$.

Exercice 3: Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$.
3. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$.
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$.
6. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$.

Raisonnements mathématiques

Exercice 4: Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 5: Déterminer la véracité des propositions suivantes.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 \neq y^2 \Rightarrow x \neq y$

Exercice 6: Démontrer les propositions suivantes :

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. $a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 6 divise $5n^3 + n$.
4. Deux entiers positifs sont multiples l'un de l'autre si, et seulement si, ils sont égaux.

Exercice 7: Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre entier $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 8: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie par

$$u_0 = 3,\ \ u_1 = 7\ \ \forall n \geqslant 2,\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}\,.$$

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

Exercice 9: [*] Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des entiers naturels p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 10: Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\},\ \ \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}\,.$$

Exercice 11: Résoudre l'équation $\sqrt{x+4} = x - 2$ d'inconnue réelle x.

Exercice 12: Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction constante et d'une fonction dont l'image de 0 vaut 0.

Exercice 13: Arnaud et Arthur jouent à un jeu avec une tablette de chocolat. Chacun leur tour, ils découpent la tablette en 2 et donnent le morceau de leur choix à l'autre. Celui qui hérite du dernier carré de chocolat a perdu. Montrer que si Arnaud laisse un morceau carré de la tablette à Arthur, alors il est en mesure de gagner la partie à coup sur.